第５講　図形の性質

1　△PBD の辺 PB 上に 2 点 P，B のいずれとも異なる点 A をとり，辺 PD 上に 2 点 P，D のいずれとも異なる点 C をとる。4 点 A，B，C，D が同一円周上にあり，AB＝2，PC＝2，PD＝12 のとき，PA＝[ア]である。

点 M を線分 AB の中点とし，点 N を線分 CD の中点とする。線分 AB を直径とする円と線分 CD を直径とする円が点 E で接していて，3 点 M，E，N が一直線上にこの順に並んでいるとする。このとき

$$\mathrm{MN}=\boxed{イ},\quad \mathrm{PE}=\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$$

である。また

$$\cos\angle\mathrm{MPN}=\frac{\boxed{オカ}}{\boxed{キク}}$$

である。

（次ページに続く。）

線分 PN 上に点 F を直線 MF と直線 PN が垂直に交わるようにとり，線分 PM 上に点 G を直線 NG と直線 PM が垂直に交わるようにとる。このとき

$$\mathrm{PF}=\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}},\quad \mathrm{PG}=\frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。さらに，線分 MF と線分 NG の交点を J とする。このとき

$$\mathrm{JE}=\frac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チツ}}}$$

である。

2　点 Z を端点とする半直線 ZX と半直線 ZY があり，$0° < \angle XZY < 90°$ とする。また，$0° < \angle SZX < \angle XZY$ かつ $0° < \angle SZY < \angle XZY$ を満たす点 S をとる。点 S を通り，半直線 ZX と半直線 ZY の両方に接する円を作図したい。

円 O を，次の (Step 1)〜(Step 5) の**手順**で作図する。

手順

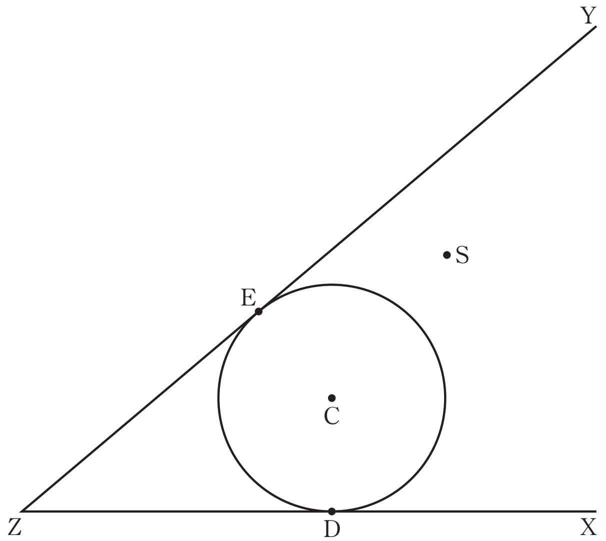
(Step 1)　$\angle XZY$ の二等分線 ℓ 上に点 C をとり，下図のように半直線 ZX と半直線 ZY の両方に接する円 C を作図する。また，円 C と半直線 ZX との接点を D，半直線 ZY との接点を E とする。

(Step 2)　円 C と直線 ZS との交点の一つを G とする。

(Step 3)　半直線 ZX 上に点 H を $DG /\!/ HS$ を満たすようにとる。

(Step 4)　点 H を通り，半直線 ZX に垂直な直線を引き，ℓ との交点を O とする。

(Step 5)　点 O を中心とする半径 OH の円 O をかく。



参考図

（次ページに続く。）

(1)　(Step 1)～(Step 5) の**手順**で作図した円 O が求める円であることは，次の**構想**に基づいて下のように説明できる。

構想

円 O が点 S を通り，半直線 ZX と半直線 ZY の両方に接する円であることを示すには，OH＝［ア］が成り立つことを示せばよい。

作図の**手順**より，△ZDG と △ZHS との関係，および △ZDC と △ZHO との関係に着目すると

DG：［イ］＝［ウ］：［エ］

DC：［オ］＝［ウ］：［エ］

であるから，DG：［イ］＝DC：［オ］となる。

ここで，3 点 S，O，H が一直線上にない場合は，∠CDG＝∠［カ］であるので，△CDG と△［カ］との関係に着目すると，CD＝CG より OH＝［ア］であることがわかる。

なお，3 点 S，O，H が一直線上にある場合は，DG＝［キ］DC となり，DG：［イ］＝DC：［オ］より OH＝［ア］であることがわかる。

［ア］～［オ］の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ DH	① HO	② HS	③ OD	④ OG
⑤ OS	⑥ ZD	⑦ ZH	⑧ ZO	⑨ ZS

［カ］の解答群

⓪ OHD	① OHG	② OHS	③ ZDS
④ ZHG	⑤ ZHS	⑥ ZOS	⑦ ZCG

（次ページに続く。）

(2)　点Sを通り，半直線ZXと半直線ZYの両方に接する円は二つ作図できる。特に，点Sが∠XZYの二等分線ℓ上にある場合を考える。半径が大きい方の円の中心をO_1とし，半径が小さい方の円の中心をO_2とする。また，円O_2と半直線ZYが接する点をIとする。円O_1と半直線ZYが接する点をJとし，円O_1と半直線ZXが接する点をKとする。

作図をした結果，円O_1の半径は5，円O_2の半径は3であったとする。このとき，IJ＝ クケコ ，すなわち $\text{IJ} = \boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケコ}}$ である。さらに，円O_1と円O_2の接点Sにおける共通接線と半直線ZYとの交点をLとし，直線LKと円O_1との交点で点Kとは異なる点をMとすると

$$\text{LM}\cdot\text{LK} = \boxed{サシ}$$

である。

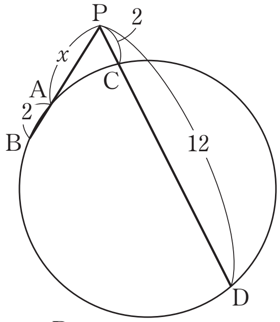
また，$\text{ZI} = \boxed{ス}\sqrt{\boxed{セソ}}$ であるので，直線LKと直線ℓとの交点をNとすると

$$\frac{\text{LN}}{\text{NK}} = \frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}},\quad \text{SN} = \frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}$$

である。

第５講　図形の性質

1 PA＝x とおくと，方べきの定理より



$$PA\cdot PB=PC\cdot PD$$

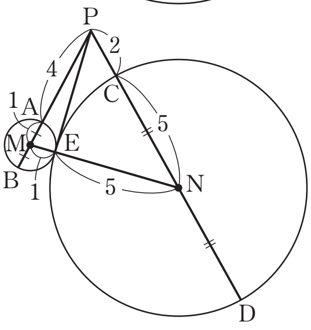
$$x(x+2)=2\cdot 12$$

$$x^2+2x-24=0$$

$$(x+6)(x-4)=0 \qquad x=-6,\ 4$$

よって，PA＝4

線分 AB を直径とする円(中心は点 M)と線分 CD を直径とする円(中心は点 N)が点 E で接しているので，



(2 円の中心間の距離)＝(2 円の半径の和)

であることから

$$MN=1+5=6$$

また，方べきの定理より

$$PA\cdot PB=PE^2$$

$$PE^2=4\cdot(4+2)=24$$

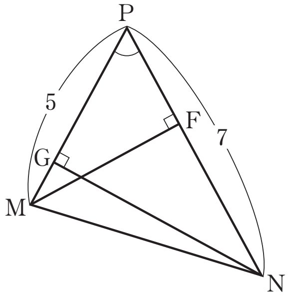
よって，PE＝$2\sqrt{6}$

(このとき $PM^2=ME^2+PE^2$ が成立するので，∠PEM＝∠PEN＝90°)

また，△MNP で余弦定理より

$$\cos\angle MPN=\frac{PM^2+PN^2-MN^2}{2PM\cdot PN}=\frac{5^2+7^2-6^2}{2\cdot5\cdot7}=\frac{19}{35}$$

直角三角形 MPF で



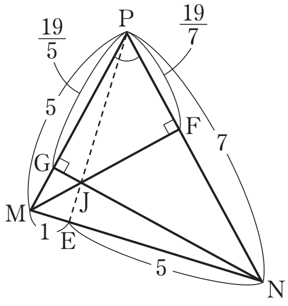
$$PF=PM\cos\angle MPN=5\cdot\frac{19}{35}=\frac{19}{7}$$

直角三角形 GPN で

$$PG=PN\cos\angle MPN=7\cdot\frac{19}{35}=\frac{19}{5}$$

よって，$FN=7-\frac{19}{7}=\frac{30}{7}$，$GM=5-\frac{19}{5}=\frac{6}{5}$ より

$$\frac{PG}{GM}\cdot\frac{ME}{EN}\cdot\frac{NF}{FP}=\frac{19}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{30}{19}=1$$



が成り立つ。

したがって，チェバの定理の逆より，3 直線 MF，NG，PE が 1 点 J で交わる。

(点 J は △PMN の垂心である)

メネラウスの定理より

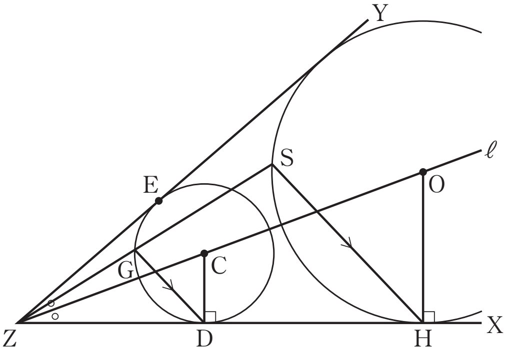
$$\frac{NM}{ME}\cdot\frac{EJ}{JP}\cdot\frac{PF}{FN}=1$$

$\dfrac{6}{1}\cdot\dfrac{\mathrm{JE}}{\mathrm{PJ}}\cdot\dfrac{19}{30}=1$　　よって，$\dfrac{\mathrm{JE}}{\mathrm{PJ}}=\dfrac{5}{19}$

したがって，$\mathrm{JE}=\dfrac{5}{24}\mathrm{PE}=\dfrac{5}{24}\cdot 2\sqrt{6}=\dfrac{5\sqrt{6}}{12}$

2 (1)　OH＝OS（⑤）を示せばよい。

作図の手順より



$\triangle$ZDG∽$\triangle$ZHSであるから

DG：HS＝ZD：ZH

（②）（⑥）（⑦）

$\triangle$ZDC∽$\triangle$ZHO であるから

DC：HO＝ZD：ZH

（①）

よって，DG：HS＝DC：HO

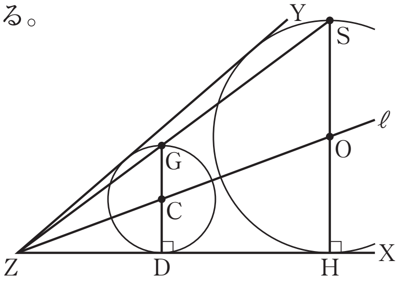
ここで，3 点 S，O，H が一直線上にない場合は，$\angle$CDG＝$\angle$OHS（②）であるので，$\triangle$CDG∽$\triangle$OHS である。

よって，CD＝CG より OH＝OS であることがわかる。

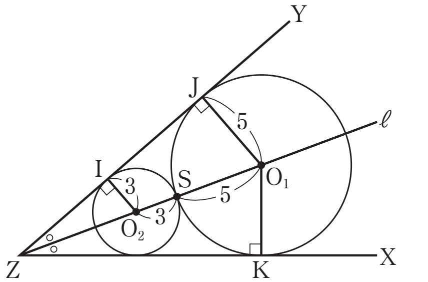
なお，3 点 S，O，H が一直線上にある場合は，

DG＝2DC となり，DG：HS＝DC：HO より

OH＝OS であることがわかる。



(2)



三平方の定理より　$\mathrm{IJ}=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$

方べきの定理より　LM・LK＝LS^2

ここで，LI＝LS＝LJ より

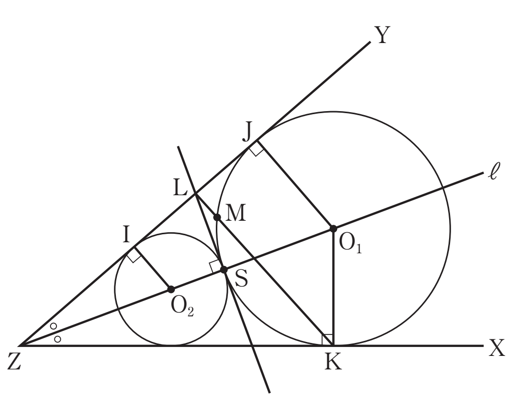
$\mathrm{LS}=\dfrac{1}{2}\mathrm{IJ}=\sqrt{15}$

したがって，LM・LK＝$(\sqrt{15})^2=15$

また，$\triangle \mathrm{ZO_2I}$∽$\triangle \mathrm{ZO_1J}$ より，

$\mathrm{ZI}:\mathrm{ZJ}=\mathrm{O_2I}:\mathrm{O_1J}$

ZI＝x とおくと，$x:(x+2\sqrt{15})=3:5$



$x=3\sqrt{15}$　　　よって，$\text{ZI}=3\sqrt{15}$

角の二等分線の性質より

$$\frac{\text{LN}}{\text{NK}}=\frac{\text{ZL}}{\text{ZK}}=\frac{\text{ZL}}{\text{ZJ}}=\frac{\text{ZI}+\text{IL}}{\text{ZI}+\text{IL}+\text{LJ}}=\frac{3\sqrt{15}+\sqrt{15}}{3\sqrt{15}+\sqrt{15}+\sqrt{15}}=\frac{4\sqrt{15}}{5\sqrt{15}}=\frac{4}{5}$$

直角三角形 ZLS で

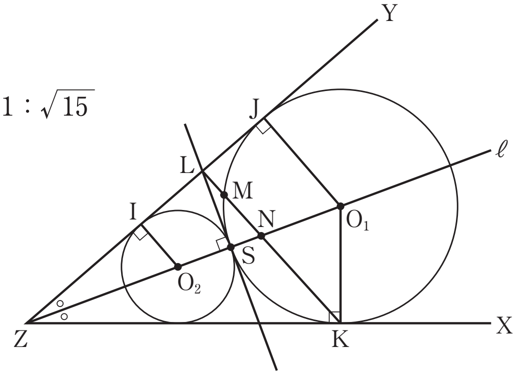
$\text{ZL}:\text{LS}=4\sqrt{15}:\sqrt{15}=4:1$ より

$\text{ZL}:\text{LS}:\text{ZS}=4:1:\sqrt{4^2-1^2}=4:1:\sqrt{15}$

よって，$\text{ZS}=\sqrt{15}\,\text{LS}=15$

また，点 K から直線 ℓ に垂線を下ろし，直線 ℓ との交点を P とすると $\triangle\text{LSN}\backsim\triangle\text{KPN}$ であることから，

$$\text{KP}=\frac{5}{4}\text{LS}=\frac{5\sqrt{15}}{4}$$



直角三角形 ZKP で

$\text{ZK}:\text{KP}=5\sqrt{15}:\frac{5}{4}\sqrt{15}=4:1$ より

$\text{ZK}:\text{KP}:\text{ZP}=4:1:\sqrt{15}$　　よって，$\text{ZP}=\sqrt{15}\,\text{KP}=\frac{75}{4}$

したがって，$\text{SP}=\text{ZP}-\text{ZS}=\frac{75}{4}-15=\frac{15}{4}$

ゆえに，$\text{SN}=\frac{4}{4+5}\text{SP}=\frac{4}{9}\cdot\frac{15}{4}=\frac{5}{3}$

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。